Feuille de TD

Exercice 1 Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$\varphi(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-x^2}} & \text{si } |x| < 1, \\ 0 \quad \text{si } |x| \geq 1 \end{cases}$$

Montrer que $\varphi \in \mathcal{D}$

Exercice 2

1. Soient f et g deux fonctions quelconques. Montrer que :
$$supp(fg) \subset supp\, f \cap supp\, g$$
2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$.
Montrer que si $\varphi \in \mathcal{D}$ alors $f\varphi \in \mathcal{D}$.
3. Montrer que $supp(\varphi') \subseteq supp(\varphi)$ pour $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Conclure

Exercice 3 Soit $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$H(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq 0, \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Montrer que $H \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ et expliciter la distribution associée.

Exercice 4 Montrer que la distribution δ est nulle sur tout ouvert ne contenant pas l'origine. En déduire $Supp\ \delta$

Exercice 5 Les applications suivantes définissent-elles des distributions sur $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ ou sur $\mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$?

1. $< T, \varphi >= |\varphi(0)|$
2. $< T, \varphi >= \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi'(x) e^{x^2}\, dx,$
3. $< T, \varphi >= \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\cos(x),$
4. $< T, \varphi >= \varphi(2) - \varphi(10)$
5. $< T, \varphi >= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xy\, \varphi''(\sqrt{x^2+y^2})\, dxdy$
6. $< T, \varphi >= \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t,t)\, dt$

Exercice 6 Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$.

1. Montrer qu'il existe $\psi \in \mathcal{C}^{+\infty}(\mathbb{R})$ telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$\boxed{\varphi(x) = \varphi(0) + x\psi(x)} \quad et \quad |\psi(x)| \leq \| \varphi' \|_\infty$$
2. Montrer que la limite
$$\lim_{\epsilon \to 0^+} \int_{|x| \geq \epsilon} \frac{\varphi(x)}{x}\, dx$$
existe.
3. Montrer que $vp(\frac{1}{x})$ définie par
$$< vp(\frac{1}{x}), \varphi >= \lim_{\epsilon \to 0^+} \int_{|x| \geq \epsilon} \frac{\varphi(x)}{x}\, dx, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$$
est une distributions.

CamScanner

Exercice 7 Soit

$$f(x) = \begin{cases} 1 \text{ sur } \{a\}, \\ 0 \text{ ailleurs} \end{cases}$$

la fonction caractéristique de $\{a\}$ et soit f la distribution associée à cette fonction.
Déterminer $suppf(x)$ et $suppf$.

Exercice 8 La fonction de Heaviside dite échelon unité est définie par

$$H(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < 0, \\ 1 \text{ si } x \geq 0 \end{cases}$$

et détermine une distribution notée T_H. Déterminer les intervalles de $\mathbb{R}$ sur lesquels les distributions $T_H + \delta$ et $\Delta = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta_k$ (c'est la distribution peigne de Dirac) sont nulles.

Exercice 9 Soit ψ une fonction de $\mathcal{C}^\infty$

1. Déterminer la distribution $\psi\delta$.
2. En déduire $\psi\delta$ quand $\psi(x) = x$.

Exercice 10 1. Soit g une fonction de $\mathcal{C}^\infty$ et $T \in \mathcal{D}'$ Montrer que

$$(gT)' = g'T + gT'$$

2. Calculer les dérivées des distributions suivantes:

$$\sin(x)T_H, \qquad \cos(x)T_H, \qquad \sin(\pi x)1\!\!1_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]}$$

Exercice 11 Calculer la dérivée au sens des distribu- tions de la fonction :
(1) $f(x) = |x|$
(2) $g(x) = sgn(x)$ $\quad (g(x) = 1 \text{ si } x > 0,\ g(x) = -1 \text{ si } x < 0 \text{ et } g(x) = 0 \text{ si } x = 0)$
(3) $h(x) = 1\!\!1_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]}(x)$

Exercice 12 On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} \cos(x) & \text{si } x \leq 0 \\ x & \text{si } 0 < x < 1 \\ 2x & \text{si } 1 \leq x \end{cases}$$

et soit T_f l'application définie sur $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ par :

$$< T_f, \varphi >= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi(x)dx \qquad \text{pour tout} \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$$

1. Montrer que T_f définit une distribution sur $\mathbb{R}$
2. Calculer la dérivée de T_f (notée T_f')
3. Calculer la dérivée seconde de T_f (notée T_f'')

CamScanner

• **Exercice 13** Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ et $x \in \mathbb{R}$. On pose $D = -\frac{d^2}{dx^2} + 4\frac{d}{dx}$ et

$$< T, \varphi >= \int_{-\infty}^{a} f(x)\varphi(x)dx + \int_{a}^{+\infty} g(x)\varphi(x)dx$$

où a est une constante, f et g sont deux fonctions de classe $C^2(\mathbb{R})$ vérifiant les conditions :

$$Df(x) = Dg(x) = 0, \quad f(a) - g(a) = 1, \quad f'(a) - g'(a) = 5.$$

Montrer q'au sens des distributions $DT = \delta_a' + \delta_a$.

Exercice 14 Dans le plan (x, y), on appelle fonction de Heaviside la fonction $H(x, y)$ égala à 1 si $x \geq 0$ et $y \geq 0$ et à 0 ailleurs. Montrer que l'on a, au sens des distributions

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y} = \delta_{(0,0)}$$

• **Exercice 15** Soit $u(x, t)$ la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$u(x,t) = \begin{cases} \alpha \text{ si } t^2 - x^2 \geq 0, \quad t \geq 0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

1. Montrer que $u(x, t)$ définit une distribution dans $\mathbb{R}^2$.
2. Calculer au sens de distributions l'expression

$$\Big(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\Big)u,$$

où $\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}$ étant l'opérateur des ondes.

3. Déterminer α de façon que $u(x, t)$ soit solution de l'équation suivante :

$$\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \delta$$

où v est une constante positive et $\delta = \delta(x, t)$ la distribution de Dirac.

• **Exercice 16** Soit $\varphi \in \mathcal{D}$, on pose

$$\check{\varphi}(x) = \varphi(-x).$$

Une distribution T est dite paire si

$$< T, \check{\varphi}(x) >=< T, \varphi >$$

et impaire si

$$< T, \check{\varphi}(x) >= - < T, \varphi >$$

Soit T une distribution, étudier la parité des distributions U et V définies par

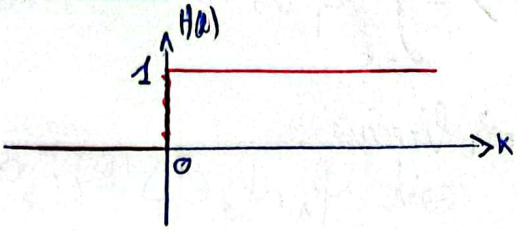
$$< U, \varphi >=< T, \varphi > + < T, \check{\varphi} >, \qquad \varphi \in \mathcal{D}$$

$$< V, \varphi >=< T, \varphi > - < T, \check{\varphi} >, \qquad \varphi \in \mathcal{D}$$

• **Exercice 17** Soit $z = x + iy \in \mathbb{C}$ et $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\Big)$ l'opérateur de Cauchy-Riemann. Calculer, au sens des distributions, l'expression $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\Big(\frac{1}{z}\Big)$.
Indication : on pensera à effectuer un changement de variables en coordonnées polaires.

CamScanner

Correction de TD



* Exercice 3 :

$$H(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq 0; \\ 0 & \text{si } x < 0; \end{cases}$$

⊛ $H \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$; en effet :

1ère méth • Soit $[a,b] \subset \mathbb{R} (a,b \in \mathbb{R}, a<b)$

$$\text{on a : } \int_a^b H(x)dx = \begin{cases} 0 & \text{si } b<0 \\ \int_0^b dx = b & \text{si } a<0<b \\ \int_a^b dx = b-a & \text{Si } a>0 \end{cases}$$

Autrement 2ème méth • H est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ donc elle est loc. intég sur $\mathbb{R}$.

⊛ $H \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ donc $T_H \in \mathcal{D}'$; $\langle T_H, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} H(x)\varphi(x)\,dx = \int_0^{+\infty} \varphi(x)\,dx \quad \forall \varphi \in$

Rque si $\Omega = \mathbb{R}^n \Rightarrow \langle T_H, \varphi \rangle = \int_0^{+\infty} \varphi(x_1, \dots, x_n)\,dx_1 \dots dx_n$

* Exercice 4 :

* Soit V un ouvert ne contenant pas 0 mque $\delta = 0$ sur V

$\hookrightarrow \Leftrightarrow \langle \delta, \varphi \rangle = 0, \ \varphi \in \mathcal{D}$, $\text{supp} \varphi \subset V$

soit $\varphi \in \mathcal{D}$ avec $\text{supp}\,\varphi \subset V$

on a $\langle \delta, \varphi \rangle = \varphi(0) = 0$ car $\{0\} \notin \text{supp}\,\varphi$

* $\text{supp}\,\delta = (\mathbb{R} \setminus \{0\})^c = \{0\}$

(dans le cas général : $\text{Supp}\,\delta_a = \{a\}$)

* Exercice 5 :

(distr. régulier $\rightarrow \int$; distr. de Dirac $\rightarrow$ pas d'intég ; autre distr)

(valeur abs. : n'est pas linéaire)

- 1 - $\langle T, \varphi \rangle = |\varphi(0)|$

$T : \mathcal{D}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$

$\varphi \longmapsto \langle T, \varphi \rangle = |\varphi(0)|$

T n'est pas linéaire car : $\langle T, \varphi_1 + \varphi_2 \rangle = |\varphi_1(0) + \varphi_2(0)|$

$\neq |\varphi_1(0)| + |\varphi_2(0)|$

$\neq \langle T, \varphi_1 \rangle + \langle T, \varphi_2 \rangle$

-2- $\langle T, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi'(x) e^{x^2} dx$

($\langle T, \varphi \rangle$ est une dist. : • Vérifier la linéarité si linéaire • Vérifier la continuité)

* Test linéarité :

Soit $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ on a :

$$\langle T, \alpha_1 \varphi_1 + \alpha_2 \varphi_2 \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} (\alpha_1 \varphi_1 + \alpha_2 \varphi_2)'(x) e^{x^2} dx$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \{\alpha_1 (\varphi_1)'(x) e^{x^2} + \alpha_2 (\varphi_2)'(x) e^{x^2} dx$$

$$= \alpha_1 \int_{-\infty}^{+\infty} (\varphi_1)'(x) e^{x^2} dx + \alpha_2 \int_{-\infty}^{+\infty} (\varphi_2)'(x) e^{x^2} dx$$

$$= \alpha_1 \langle T, \varphi_1 \rangle + \alpha_2 \langle T, \varphi_2 \rangle$$

* soit $(\varphi_n)_n \in \mathcal{D} \;/\; \varphi_n \xrightarrow[+\infty]{} \varphi$

$\forall k \in \mathbb{N}$: il $\exists$ K : compact de $\mathbb{R}$ tq $\operatorname{supp} \varphi_n \subset K$; $\sup_K |\varphi_n^{(k)}(x) - \varphi^{(k)}(x)| \xrightarrow[+\infty]{} 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}$

(i.e. $\|\varphi_n^{(k)} - \varphi^{(k)}\|_\infty \xrightarrow[+\infty]{} 0$)

on a $|\langle T, \varphi_n \rangle - \langle T, \varphi \rangle| = |\langle T, \varphi_n - \varphi \rangle|$

$e^{x^2} \longrightarrow 2x e^{x^2}$; $\varphi_n' - \varphi' \to \varphi_n - \varphi$

$$= \left| \int_{-\infty}^{+\infty} (\varphi_n'(x) - \varphi'(x)) e^{x^2} \right| dx \quad \text{(IPP)}$$

$$= \left| [(\varphi_n - \varphi) e^{x^2}]_{-a}^{a} - \int_{-a}^{a} (\varphi_n - \varphi) 2x e^{x^2} dx \right|$$

($\varphi_n(a) = 0$, $\varphi(a) = 0$ car $\{-a, a\} \notin \operatorname{support} \varphi_n$; "0")

$$\leq \int_K |\varphi_n'(x) - \varphi'(x)| e^{x^2} dx$$

$$\leq \sup_{x \in K} |\varphi_n'(x) - \varphi'(x)| \int_K e^{x^2} dx \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

$$\leq \sup |\varphi_n - \varphi| \int_{-a}^{a} 2x e^{x^2} dx \quad ([e^{x^2}]_{-a}^{a})$$

-3- $\langle T, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) \cos x \, dx$; $x \longmapsto \cos x$ est loc intégrable sur $\mathbb{R}$

Donc $\langle T, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) \cos x \, dx$ est une dist : c'est la dist. régulière associée où la fct $x \longmapsto \cos x$

-4- $\langle T, \varphi \rangle = \varphi(2) - \varphi(10) = \langle \delta_2, \varphi \rangle - \langle \delta_{10}, \varphi \rangle = \langle \delta_2 - \delta_{10}, \varphi \rangle$

$T = \delta_2 - \delta_{10}$ est une dist

-5- $\langle T, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} xy\, \varphi''\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) dx\, dy$

* Test linéarie....

* Test continue, en effet:

Soit $(\varphi_n) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2) / \varphi_n \xrightarrow{\mathcal{D}} \varphi$; $\operatorname{supp} \varphi_n \subset [-a,a]^2, \forall n$

$$|\langle T, \varphi_n \rangle - \langle T, \varphi \rangle| = |\langle T, \varphi_n - \varphi \rangle| = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} xy \left(\varphi_n''\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) - \varphi''\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) \right) dx\, dy \right|$$

$$\leq \sup_{[-a,a]^2} |\varphi_n''(x) - \varphi''(x)| \left(\int_{-a}^{a} \int_{-a}^{a} |xy|\, dx\, dy \right) \xrightarrow[+\infty]{} 0$$

($\sup \to +\infty$; $\int \to +\infty$)

D'où $\langle T, \varphi_n \rangle \xrightarrow[+\infty]{} \langle T, \varphi \rangle$

-6- $\langle T, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t,t)\, dt$

Linéarité ⊛ $\langle T, \alpha\varphi_1 + \beta\varphi_2 \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} (\alpha\varphi_1(t,t) + \beta\varphi_2(t,t))\, dt$

$$= \alpha \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_1(t,t)\, dt + \beta \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_2(t,t)\, dt$$

$$= \alpha \langle T, \varphi_1 \rangle + \beta \langle T, \varphi_2 \rangle$$

⊛ Soit $(\varphi_n)_n \in \mathcal{D} / \varphi_n \xrightarrow{\mathcal{D}}_{+\infty} 0$

on a: $|\langle T, \varphi_n \rangle| = \left| \int_{-a}^{a} \varphi_n(t,t)\, dt \right| \leq \sup_{[-a,a]} |\varphi_n| \int_{-a}^{a} dt \xrightarrow[+\infty]{} 0$

($2a$)

(Dist. régulière associée à la fonct constante 1: $\langle T, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x,y)\, dx\, dy$)

Exercice 6 :

- 1 - $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$: $\varphi(x) = \varphi(0) + \int_0^x \varphi'(t)\,dt$; on pose $t = xv$, $dt = x\,dv$

$$\varphi(x) = \varphi(0) + \int_0^1 \varphi'(xv)\,x\,dv = \varphi(0) + x\int_0^1 \varphi'(xv)\,dv$$

$$= \varphi(0) + x\,\psi(x) \quad \text{avec } \psi(x) = \int_0^1 \varphi'(xv)\,dv$$

avec $\psi(x) = \dfrac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x}$

φ cont sur $[0,x]$ et dérivable sur $]0,x[\Rightarrow \exists c \in]0,x[$

$\dfrac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} = \varphi'(c) = \psi(x)$ (TAC)

$$|\psi(x)| = |\varphi'(c)| \leq \sup|\varphi'(x)| \leq \|\varphi'\|_\infty$$

- 2 - $\varphi \in \mathcal{D}$; $(\text{supp}\,\varphi \subset [-a,a])$

$$\int_{|x|\geq\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}\,dx = \int_{a\geq|x|\geq\varepsilon} \frac{\varphi(0) + x\,\psi(x)}{x}\,dx = \int_{\varepsilon\leq|x|\leq a} \frac{\varphi(0)}{x}\,dx + \int \psi(x)\,dx$$

$\Leftrightarrow x \in]-\infty,-\varepsilon] \cup [\varepsilon,+\infty[$; $\varepsilon \leq |x| \leq a$

$$= \varphi(0)\int_{\varepsilon\leq|x|\leq a} \frac{1}{x}\,dx + \int_{\varepsilon\leq|x|\leq a} \psi(x)\,dx$$

(R) $\int_{\varepsilon\leq|x|\leq a} \frac{1}{x}\,dx = \int_{[-a,-\varepsilon]\cup[\varepsilon,a]} \frac{1}{x}\,dx = 0$ car $(x \to \frac{1}{x}$ est impaire$)$

* $\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\varepsilon\leq|x|\leq a} \psi(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0} \int \psi(x)\,\mathbb{1}_{\varepsilon\leq|x|\leq a}\,dx$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x)\,\mathbb{1}_{[-a,a]}\,dx = \int_{-a}^{a} \psi(x)\,dx < +\infty$$

$\left[\text{car } |\psi(x)\,\mathbb{1}_{\varepsilon\leq|x|\leq a}| \leq |\psi(x)| \leq \|\varphi'(x)\|_\infty\right]$

Alors: $\lim_{\varepsilon \to +\infty} \int_{|x| \geq a} \frac{\psi(x)}{x} dx = \int_{-a}^{a} \psi(x) dx$

-3- Linéarité ....

• Continuité : soit $(\varphi_n)_n \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) / \varphi_n \xrightarrow[+\infty]{\mathcal{D}} \varphi$

Mq $\langle vp(\frac{1}{x}), \varphi_n \rangle \xrightarrow[+\infty]{} \langle vp(\frac{1}{x}), \varphi \rangle$

on a

$$|\langle vp(\tfrac{1}{x}), \varphi_n \rangle - \langle vp(\tfrac{1}{x}), \varphi \rangle| = |\langle vp(\tfrac{1}{x}), \varphi_n - \varphi \rangle|$$

$$= \left| \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|x| \geq \varepsilon} \frac{\varphi_n(x) - \varphi(x)}{x} dx \right| = \left| \int_{-a}^{a} (\varphi_n(x) - \varphi(x)) dx \right|$$

$\int_{-a}^{a} dx$; convergence $(1)+(2)$

$$\leq |\varphi_n(x) - \varphi(x)| \, 2a \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0 \leq \|\varphi_n'(x) - \varphi'(x)\|_{+\infty} 2a \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

Exercice 7 :

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = a \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} = \mathbb{1}_{\{a\}}(x)$$

$f = T_f$: dist. associée à f

* $\text{supp } f(x) = \{a\}$

* $\text{supp } f = \text{supp } T_f$? ; soit $\varphi \in \mathcal{D}$ on a :

$$\langle f, \varphi \rangle = \langle T_f, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \varphi(x) dx = 0 \text{ car } f = 0 \text{ p.p}$$

Alors $\text{supp } T_f = \emptyset$ (opposé de 0)

Rque :

si f est continue alors $\text{supp } f(x) = \text{supp } T_f$.

Exercice 8 :

$H(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < 0, \\ 1 \text{ si } x \geq 0, \end{cases}$

($T = 0$ sur $V \Leftrightarrow \langle T, \varphi \rangle = 0, \ \varphi \in \mathcal{D}$ avec $\text{supp} \subset V$)

(il faut que la dist. est nulle)

-1- $T_H + \delta$ est nulle sur $\mathbb{R}^-$ → en effet : soit $\varphi \in \mathcal{D}$ on a :

$$\langle T_H + \delta, \varphi \rangle = \langle T_H, \varphi \rangle + \langle \delta, \varphi \rangle$$

$$= \int_0^{+\infty} \varphi(x)\,dx + \varphi(0) = 0 \iff$$

φ est nulle sur $[0, +\infty[$ $\Leftrightarrow$ $\text{supp}\,\varphi \subset]-\infty, 0[$

② $\Delta = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta_k$ est nulle sur $]-\infty, 0] \cup \mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$

en effet ; $\varphi \in \mathcal{D}$: $\langle \Delta, \varphi \rangle = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \langle \delta_k, \varphi \rangle$

$$= \sum_{\delta=+\infty}^{+\infty} \varphi(k) = 0 \text{ ssi } \varphi \text{ est nulle} \iff$$

$[\Leftrightarrow \text{Supp} \subset \mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}]$

Exercice 11 :

1 - $f(x) = |x|$; . $T_f \in \mathcal{D}'$ donc T_f est dérivable et on a $T_f' = ?$

soit $\varphi \in \mathcal{D}$; on a $\langle T_f', \varphi \rangle = -\langle T_f, \varphi' \rangle = -\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\varphi'(x)\,dx$

$$= -\int_{-\infty}^{+\infty} |x|\,\varphi'(x)\,dx = -\left[\int_{-\infty}^{0} (-x)\,\varphi'(x)\,dx - \int_{0}^{+\infty} x\,\varphi'(x)\,dx\right] = +\int_{-\infty}^{0} x\,\varphi'(x)\,dx - \int_{0}^{+\infty} x\,\varphi'(x)\,dx$$

IPP $\begin{vmatrix} u \to 1 \\ \varphi'(x) \to \varphi(x) \end{vmatrix}$ $= [x\varphi(x)]_{-\infty}^{0} - \int_{-\infty}^{0} \varphi(x)\,dx - [x\varphi(x)]_{0}^{+\infty} + \int_{0}^{+\infty} \varphi(x)\,dx$ (IPP pour récupérer $g'(x)$)

$= \langle g, \varphi \rangle$

avec $g(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$

-2- soit $\varphi \in \mathcal{D}$ on a $\langle T_g', \varphi \rangle = -\langle T_g, \varphi'(x) \rangle = -\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\,\varphi'(x)\,dx$

$$= \int_{-\infty}^{0} \varphi'(x)\,dx - \int_{0}^{+\infty} \varphi'(x)\,dx = [\varphi(x)]_{-\infty}^{0} - [\varphi(x)]_{0}^{+\infty} = 2\varphi(0) = \langle 2\delta, \varphi(x) \rangle$$

-3- $h(x) = 1_{\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]}(x)$; $T_h \in D'$; $T_h' = ?$

Soit $\varphi \in D$; on a $\langle T_h', \varphi(x) \rangle = -\langle T_h, \varphi'(x) \rangle = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \varphi'(x)\,dx = -\left[\varphi(x)\right]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}$

$= -\varphi\left(\frac{1}{2}\right) + \varphi\left(-\frac{1}{2}\right) = -\langle \delta_{1/2}, \varphi \rangle + \langle \delta_{-1/2}, \varphi \rangle$

$= \langle \delta_{-\frac{1}{2}} - \delta_{1/2}, \varphi \rangle \Rightarrow T_{1_{\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]}} = \delta_{-\frac{1}{2}} - \delta_{1/2}$

$\Rightarrow \boxed{T_{1_{[a,b]}} = \delta_a - \delta_b}$

Tout dist est infiniment dérivable

Exercice 13 :

Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, on a : $\langle DT, \varphi \rangle = \left\langle \left(\frac{-d^2}{dx^2} + 4\frac{d}{dx}\right) T, \varphi(x) \right\rangle$

$= \langle -T'' + 4T', \varphi(x) \rangle = -\langle T'', \varphi \rangle + 4\langle T', \varphi(x) \rangle$

$= -(-1)^2 \langle T, \varphi''(x) \rangle - 4\langle T, \varphi'(x) \rangle$

$= -\int_{-\infty}^{a} f(x)\varphi''(x)dx + \int_{a}^{+\infty} g(x)\varphi''(x)dx - 4\left[\int_{-\infty}^{a} f(x)\varphi'(x)dx + \int_{a}^{+\infty} g(x)\varphi'(x)dx\right]$

IPP : $f(x) \to f'(x)$ $\quad g(x) \to g'(x)$

$\varphi'' \to \varphi'$ $\quad \varphi'' \to \varphi'$

$f \to f'$ $\quad g \to g'$

$\varphi' \to \varphi$ $\quad \varphi' \to \varphi$

$$\langle DT, \varphi \rangle = -\left[f(x)\varphi'(x)\right]_{-\infty}^{a} + \int_{-\infty}^{a} f'(x)\varphi'(x)dx - \left[g(x)\varphi'(x)\right]_{a}^{+\infty} + \int_{a}^{+\infty} g'(x)\varphi'(x)dx$$

($f' \to f''$, $\varphi' \to \varphi$; $g' \to g''$, $\varphi' \to \varphi$)

$$- 4\left[f(x)\varphi(x)\right]_{-\infty}^{a} + 4\int_{-\infty}^{a} f'(x)\varphi(x)dx - 4\left[g(x)\varphi(x)\right]_{-\infty}^{+\infty} + 4\int_{a}^{+\infty} g'(x)\varphi(x)dx$$

$$= -f(a)\varphi'(a) + g(a)\varphi'(a) - 4f(a)\varphi(a) + 4g(a)\varphi(a)$$

$$+ \underbrace{\left[f'(x)\varphi(x)\right]_{-\infty}^{a}}_{f'(a)\varphi(a)} - \int_{-\infty}^{a} f''(x)\varphi(x)dx + \underbrace{\left[g'(x)\varphi(x)\right]_{a}^{+\infty}}_{-g'(a)\varphi(a)} - \int_{a}^{+\infty} g''(x)\varphi(x)dx$$

$$+ 4\int_{-\infty}^{a} f'(x)\varphi(x)dx + 4\int_{a}^{+\infty} g'(x)\varphi(x)dx$$

$$= -\varphi'(a)\underbrace{\left[f(a) - g(a)\right]}_{=1} - 4\varphi(a)\underbrace{\left[f(a) - g(a)\right]}_{=1} + \varphi(a)\underbrace{\left[f'(a) - g'(a)\right]}_{5}$$

$$+ \int_{-\infty}^{a} \left(4f'(x) - f''(x)\right)\varphi(x)dx + \int_{a}^{+\infty} \left(4g'(x) - g''(x)\right)\varphi(x)dx$$

$Df = 0$; $Dg = 0$

$$= -\varphi'(a) + \varphi(a) \overset{Df=0}{=} \langle \delta_a, \varphi(x) \rangle - \langle \delta_a, \varphi'(x) \rangle$$

$$= \langle \delta_a, \varphi(x) \rangle + \langle \delta_a', \varphi(x) \rangle = \langle \delta_a + \delta_a', \varphi(x) \rangle$$

$$\Rightarrow \boxed{DT = \delta_a + \delta_a'}$$

(8)

Exercice 9 :

$\psi \in \mathcal{C}^\infty$, $S \in \mathcal{D}' \Rightarrow \psi S \in \mathcal{D}'$

-1- $\psi S = ?$

soit $\varphi \in \mathcal{D}$ on a : $\langle \psi(x)\delta, \varphi(x)\rangle = \langle \delta, \psi(x)\varphi(x)\rangle = \psi(0)\varphi(0)$

$= \psi(0)\langle \delta, \varphi\rangle = \langle \psi(0)\delta, \varphi\rangle$

Alors : $\boxed{\psi \delta_0 = \psi(0)\delta_0}$

-2- $x S \in \mathcal{D}'$ car $x \mapsto x$ est $\mathcal{C}^\infty$, $S \in \mathcal{D}'$ $\Rightarrow x S \in \mathcal{D}'$

$xS = 0$

$e^x S = S$

$\cos S = S$

$\sin S = 0$

Exercice 10 :

-1- soit $\varphi \in \mathcal{D}$ on a : $g \in \mathcal{C}^\infty$

$\langle gT', \varphi\rangle = \langle T', g\varphi\rangle = -\langle T, (g\varphi)'\rangle = -\langle T, g'\varphi + g\varphi'\rangle$

$= -\langle T, g'\varphi\rangle - \langle T, g\varphi'\rangle = -\langle g'T, \varphi\rangle - \langle gT, \varphi'\rangle$

$= -\langle g'T, \varphi\rangle + \langle (gT)', \varphi\rangle = \langle (gT)' - g'T, \varphi\rangle$

$= \langle (gT)', \varphi\rangle - \langle g'T, \varphi\rangle$

Alors $(gT)' = g'T + gT'$

-2- $T_H \in \mathcal{D}'$, $x \mapsto \sin x$ est $\mathcal{C}^\infty$ $\Rightarrow \sin x\, T_H \in \mathcal{D}'$ donc elle est dérivable.

on a : $(\sin x\, T_H)' = (\sin x)' T_H + \sin x\, T_H' = \cos x\, T_H + \sin x\, \delta$

$= \cos T_H + \sin(0)\delta = \cos x\, T_H$

$T_f = f$

(*) $(\cos T_H)' = -\sin x\, T_H + \cos x\, T_H' = -\sin x\, T_H + \cos x\, \delta = -\sin x\, T_H + \delta$

(*) $\sin 1_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]} = ?$

$1_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]} \in L^1_{loc} \Rightarrow T_{1_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]}} \in \mathcal{D}'$

$x \mapsto \sin(\pi x)$ est $\mathcal{C}^\infty$ (10) $\Rightarrow \sin(\pi x)\, T_{1_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]}} \in \mathcal{D}'$

$$\left(\sin(\pi x)\, T_{\mathbb{1}_{[-\frac12,\frac12]}}\right)' = \pi\cos(\pi x)\, T_{\mathbb{1}_{[-\frac12,\frac12]}} + \sin(\pi x)\, T'_{\mathbb{1}_{[-\frac12,\frac12]}}$$

$$= \pi\cos(\pi x)\, T_{\mathbb{1}_{[-\frac12,\frac12]}} + \sin(\pi x)\left(\delta_{-\frac12} - \delta_{\frac12}\right)$$

(indicatrice)

$$T'_{\mathbb{1}_{[-\frac12,\frac12]}} = T_{\left(\mathbb{1}_{[-\frac12,\frac12]}\right)'} + (a-1)\delta_{\frac12} + (1-a)\delta_{-\frac12} = \delta_{-\frac12} - \delta_{\frac12}$$

$$= \pi\cos(\pi x)\, T_{\mathbb{1}_{[-\frac12,\frac12]}} + \sin\left(-\tfrac{\pi}{2}\right)\delta_{-\frac12} - \sin\left(\tfrac{\pi}{2}\right)\delta_{\frac12}$$

$$= \pi\cos(\pi x)\,\mathbb{1}_{(-\frac12,\frac12)} - \delta_{-\frac12} - \delta_{\frac12}$$

$$\left\langle \left(\sin(\pi x)\, T_{\mathbb{1}_{[-\frac12,\frac12]}}\right)', \varphi\right\rangle = \int_{-\frac12}^{\frac12} \pi\cos(\pi x)\,\varphi(x)\,dx - \varphi\left(-\tfrac12\right) - \varphi\left(\tfrac12\right)$$

Exercice 16 :

⊛ soit $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$: $\langle U, \check{\varphi}\rangle = \langle T, \check{\varphi}'\rangle + \langle T, \check{\check{\varphi}}\rangle$

$= \langle T, \check{\varphi}\rangle + \langle T, \varphi\rangle = \langle U, \varphi\rangle$ donc U est paire

⊛ $\langle V, \varphi\rangle = \langle T, \check{\varphi}\rangle - \langle T, \check{\check{\varphi}}\rangle = \langle T, \check{\varphi}\rangle - \langle T, \varphi\rangle$

$= -\left(\langle T, \varphi\rangle - \langle T, \check{\varphi}\rangle\right) = -\langle V, \varphi\rangle$ impaire

Exercice 17 :

⊛ $z = x + iy \in \mathbb{C}$

$f(x,y) = x + iy$

Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$; $\left\langle \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\left(\frac{1}{f(x,y)}\right), \varphi(x,y)\right\rangle = \left\langle \frac12\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{1}{f(x,y)}\right), \varphi(x,y)\right\rangle$

$= -\frac12\left\langle \frac{1}{x+iy}, \frac{\partial}{\partial x}\varphi(x,y)\right\rangle - \frac{i}{2}\left\langle \frac{1}{x+iy}, \frac{\partial \varphi(x,y)}{\partial y}\right\rangle$

$$= -\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{x+iy}\frac{\partial\varphi(x,y)}{\partial x}dx\,dy - \frac{i}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{x+iy}\frac{\partial\varphi(x,y)}{\partial y}dx\,dy$$

$$= -\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x-iy}{x^2+y^2}\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x,y)\,dx\,dy - \frac{i}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x-iy}{x^2+y^2}\frac{\partial\varphi(x,y)}{\partial y}dx\,dy$$

$$= -\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{x^2+y^2}\left(x\frac{\partial\varphi}{\partial x}+y\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)dx\,dy + \frac{i}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{x^2+y^2}\left(y\frac{\partial\varphi}{\partial x}-x\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)dx\,dy$$

passons $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$ $dx\,dy = r\,dr\,d\theta$

$r>0,\ \theta\in[0,2\pi]$

$$dx\,dy = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial\theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial\theta} \end{vmatrix} dr\,d\theta = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} dr\,d\theta = r\,d\theta\,dr$$

Notons $\tilde{\varphi}(r,\theta) = \varphi(r\cos\theta, r\sin\theta)$ $\Rightarrow \frac{\partial^2\varphi}{\partial r} = \cos\theta\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \sin\theta\frac{\partial\varphi}{\partial y}$

$\Rightarrow r\frac{\partial^2\varphi}{\partial r} = x\frac{\partial\varphi}{\partial x} + y\frac{\partial\varphi}{\partial y}$

$\left(r = \frac{1}{\cos\theta}x \to dr = \frac{dx}{\cos\theta} \Rightarrow \frac{1}{\partial r} = \cos\theta\frac{1}{\partial x}\right)$

$\cdot \frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta} = -r\sin\theta\frac{\partial\varphi}{\partial x} + r\cos\theta\frac{\partial\varphi}{\partial y} = -y\frac{\partial\varphi}{\partial x} + x\frac{\partial\varphi}{\partial y}$

Alors: $\left\langle \frac{\partial}{\partial\bar{z}}\left(\frac{1}{z}\right), \varphi\right\rangle = -\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\int_0^{2\pi}\frac{1}{r^2}\cdot r\frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial r}r\,dr\,d\theta - \frac{i}{2}\left\{ -\frac{i}{2}\int_0^{+\infty}\int_0^{2\pi}\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\tilde{\varphi}}{\partial\theta}r\,dr\,d\theta \right\}$

$\varphi(r,\theta) = \varphi(r\cos\theta, r\sin\theta)$

$$= \pm\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left[\tilde{\varphi}(r,\theta)\right]_{r=0}^{r=2\pi}d\theta = \pm\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\tilde{\varphi}(0,\theta)\,d\theta$$

$\tilde{\varphi}(0,0)$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\varphi(0,0)\,d\theta = \frac{\varphi(0,0)}{2}\int_0^{2\pi}d\theta$$

$$-\frac{i}{2}\int_0^{+\infty}\frac{1}{r^2}\left[\tilde{\varphi}(r,2\pi)-\tilde{\varphi}(r,0)\right]dr$$

$\tilde{\varphi}(r,0) - \tilde{\varphi}(r,0) = 0$

$$= \frac{\varphi(0,0)}{2}\cdot 2\pi = \pi\varphi(0,0) = \pi\langle\delta_{(0,0)}, \varphi(x,y)\rangle = \langle\pi\delta_{(0,0)}, \varphi(x,y)\rangle$$

Donc:

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial\bar{z}}\left(\frac{1}{x+iy}\right) = \pi\delta}$$

$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial\bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)$

Exercice 15

$$u(x,t) = \begin{cases} \alpha \text{ si } t^2 - x^2 \geq 0,\ t \geq 0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

-1- u est continue par morceaux (c.m) $\Rightarrow u \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^2)$ donc $T_u = u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$

-2- $P = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}$; $Pu = ?$

Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$; on a : $\langle Pu, \varphi(x,t)\rangle = \left\langle \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}, \varphi(x,t)\right\rangle$

$$= \left\langle u(x,t), \frac{\partial^2}{\partial t^2}\varphi(x,t)\right\rangle - \left\langle u(x,t), \frac{\partial^2}{\partial x^2}\varphi(x,t)\right\rangle$$

$$= \iint_{\mathbb{R}^2} u(x,t)\frac{\partial^2 \varphi(x,t)}{\partial t^2}\,dx\,dt - \iint_{\mathbb{R}^2} u(x,t)\frac{\partial^2 \varphi(x,t)}{\partial x^2}\,dx\,dt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-|x|}^{+\infty} \alpha \frac{\partial^2 \varphi(x,t)}{\partial t^2}\,dt\right)dx - \int_0^{+\infty}\left(\int_{-t}^{t} \alpha \frac{\partial^2 \varphi(x,t)}{\partial x^2}\,dx\right)dt$$

$t^2 - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow t^2 \geq x^2 \Leftrightarrow t \geq |x|$

$t^2 - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 \leq t^2 \Leftrightarrow x \in [-t, t]$, $t \geq 0$

$$= \alpha \int_{-\infty}^{+\infty}\left[\frac{\partial \varphi(x,t)}{\partial t}\right]_{t=|x|}^{t=+\infty} dx - \alpha \int_0^{+\infty}\left[\frac{\partial \varphi(x,t)}{\partial x}\right]_{x=-t}^{x=t} dt$$

$$= -\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \varphi(x,|x|)}{\partial t}\,dx - \alpha \int_0^{+\infty} \frac{\partial \varphi(t,t)}{\partial x} + \alpha \int_0^{+\infty} \frac{\partial \varphi(-t,t)}{\partial x}\,dt$$

$$= -\alpha \int_{-\infty}^{0} \frac{\partial \varphi}{\partial t}(x,-x)\,dx - \alpha \int_0^{+\infty} \frac{\partial \varphi}{\partial x}(t,t)\,dt + \alpha \int_0^{+\infty} \frac{\partial \varphi}{\partial x}(-t,t)\,dt$$

$$= -\alpha \int_0^{+\infty} \frac{\partial \varphi}{\partial t}(x,x)\,dx - \alpha \int_0^{+\infty} \frac{\partial \varphi}{\partial t}(x,x)\,dx - \alpha \int_0^{+\infty} \frac{\partial \varphi}{\partial x}(t,t)\,dt + \alpha \int_0^{+\infty} \frac{\partial \varphi}{\partial x}(-t,t)\,dt$$

$$= -\alpha\left(\int_0^{+\infty} \frac{\partial \varphi(x,x)}{\partial t}\,dx + \int_0^{+\infty} \frac{\partial \varphi(t,t)}{\partial x}\,dt\right) - \alpha\left(\int_0^{+\infty} \frac{\partial \varphi(-x,x)}{\partial t}\,dx - \int_0^{+\infty} \frac{\partial \varphi}{\partial x}(-t,t)\,dt\right)$$

Posons : $\Phi_1(u) = \varphi(u,u) \rightarrow \Phi_1'(u) = \frac{\partial \varphi(u,u)}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial t}$

$\Phi_2(u) = \varphi(-u,u) \rightarrow \Phi_2'(u) = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial t}$

donc $P = -\alpha \int_0^{+\infty} \Phi_1'(u)\,du - \alpha \int_0^{+\infty} \Phi_2'(u)\,du - \alpha\left[\Phi_1(u)\right]_0^{+\infty} - \alpha\left[\Phi_2(u)\right]_0^{+\infty}$

$$= \alpha\Phi_1(0) + \alpha\Phi_2(0) = \alpha\varphi(0,0) + \alpha\varphi(0,0) = 2\alpha\varphi(0,0)$$

$$= 2\alpha\langle \delta_{(0,0)}, \varphi(x,t)\rangle = \langle 2\alpha\delta_{(0,0)}, \varphi(x,t)\rangle$$

Donc : $\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)u = 2\alpha\delta_{(0,0)}$

- 3 - on prend $\xi = vt$ pour le dernier cas donc $\left(\frac{1}{v^2}\frac{\partial}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)u = 2\alpha\,\delta_{(0,0)}(x, vt)$

avec $\langle \delta_{(0,0)}(x, vt), \varphi(x,t)\rangle = \frac{1}{v}\langle \delta_{(0,0)}(x,t), \varphi(x, \frac{t}{v})\rangle = \frac{1}{v}\varphi(0,0)$

$= \frac{1}{v}\langle \delta_{(0,0)}(x,t), \varphi(x,t)\rangle = \frac{1}{v}\varphi(0,0)$

donc $\left(\frac{1}{v^2}\frac{\partial}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)u = 2\alpha\frac{1}{v}\,\delta_{(0,0)}(x,t)$

$= 1$

on prend $\alpha = \frac{v}{2}$ ~~Pour Sabrina~~